ミクロ・マクロ双対性 : ミクロ量子系をマクロ観測データから再構成する数学的方法(情報物理学の数学的構造)

小嶋, 泉

数理解析研究所講究録
1532 巻 2007 年 105-117

ミクロ・マクロ双対性 – ミクロ量子系をマクロ観測データから再構成する数学的方法 – *

京都大学・数理解析研究所　　小嶋　泉 (Izumi Ojima)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1　何を目指すのか?

お読み下さる方に最初にお断りしたいのは，以下のような事情のため拙稿最初の３つの節（第２–４節）は，最近刊行された数理解析研究所講究録 1507 RIMS 共同研究『量子解析におけるミクロ・マクロ双対性』（研究代表者・小嶋 泉）掲載の私の報告内容と本質的に重複することです。本研究集会『情報物理学の数学的構造』(2006 年 6 月 28 – 30 日）でお話しした私の講演内容は,「ミクロ・マクロ双対性」という視点からミクロ量子系とマクロ古典系の相互関係を見直し，Galois + Fourier duality の「理念」とそれを具体化する非可換力学系の「接合積」の概念を用いて，量子物理学の発展を背後で支えてきた「量子古典対応」という物理的直観に数学的方法論としての積極的・普遍的な役割を与えよう，というプログラムの概略説明です。上記講究録 1507 の RIMS 共同研究はこの視点をメインテーマとして昨年 11 月開催され（第２回は本年 2006 年 12 月 25 – 27 日開催予定)，その時点の私の講演では未だ「接合積」にそれほど大きなウェイトを置いてなかったのですが，その後研究の進展を通じて「接合積」概念に基づく統一的な見方の優位性が明らかになってきました。その見方を本研究会での講演と共に講究録 1507 の報告にも採用したため両者の内容が接近する結果となり，本稿では講究録 1507 を引用して反復を避けるつもりでした。しかし，両研究会の性格・参加者の違いを考慮すると，導入部分全ての削除は「情報物理学」の角度から関心をお持ち頂いた方に不便を掛ける恐れがあり，理解に最小限必要な部分の重複には目をつぶって，６月の研究会後に明らかになった新しい知見を第５節に加えるという方針に変更しました。既に講究録 1507 で内容をご承知下さった方がもしあれば大変申しわけありませんが，趣旨をご理解頂ければ幸いです。

以下の議論で「ミクロ・マクロ双対性」とは，物理的自然におけるミクロ・マクロ／量子・古典レベルの記述，あるいはそこでの［記述対象 vs. 記述系］の相互関係を,「双対性」という数学的視点に立って「双方向的」な仕方でコ

*RIMS 研究集会『情報物理学の数学的構造』(研究代表者・渡辺澄夫東工大教授・2006 年 6 月 28 – 30 日）での招待講演

ントロールすること，およびそれを実現する理論的枠組を（描くべき「中味」と共に）整備するための一つの方法論的視点を意味する。ミクロ自然を記述する「窮極」理論から全てのマクロ現象を一方的・一方向的に「演繹」・「導出」する，というのが現在標準的に流布している考え方だが，それとは対照的に,「双方向性」の観点ではミクロからマクロ，マクロからミクロの往復移動とそれが演ずる理論的役割を重視する。「窮極」理論のお手本は Einstein の一般相対論に遡るが，幾何学的時空（マクロ）と物質運動（ミクロ）との間に設定された双方向的・相互規定的な関係：

$$\begin{array}{ccc} & R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\kappa T_{\mu\nu}\text{ : bottom-up feedback} & \\ \text{物質運動 } T_{\mu\nu} & \longrightarrow & \text{時空構造 } g_{\mu\nu} \\ (\text{ミクロ}) & \longleftarrow & (\text{マクロ}) \\ & \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\text{重力: top-down control} & \end{array}$$

に基づくその理論的本質は，メタレベルでの志向としての「物理学の幾何学化」に体現された「記述するもの（＝幾何学的「窮極」理論）とされるもの（＝物質運動・物理現象）の間の一方向的関係（＝演繹）」とは必ずしも調和していないように見える。

もちろん一般的に「双方向性」を強調してもそれを具体化する手立てなしには題目倒れに終わるしかないが，幸い数学の基本概念の中には双方向性の本質を体現した「双対性」という恰好の理論的装置がある：例えば局所コンパクト可換群の Fourier-Pontryagin 双対性やその本質をコンパクトな非可換群に拡げた淡中-Krein 双対性，更に任意の局所コンパクト非可換群まで取り込んだ辰馬双対性は，群と群双対（あるいは群表現の圏）との間の双方向的関係を律する双対性の典型例を与える。ここでは，そのような群双対性の本質を環への群作用と絡めてガロア理論の文脈にまで拡げ，作用素環論で頻用される接合積とそれを律する竹崎・中神の双対性 $(\mathcal{M}\rtimes G)\rtimes\hat{G}\simeq\mathcal{M}\otimes B(L^2(G))$ とが,「量子古典対応」の理解においてどのように有効に働くかを考えてみたい：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\rtimes G} & \mathcal{M}\rtimes G \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathcal{M}^G\rtimes\hat{G} & \underset{\rtimes\hat{G}}{\longleftarrow} & \mathcal{M}^G \end{array}.$$

2 セクター概念と量子古典対応

物理量の代数 $\mathfrak{F}$ およびその対称性を記述する変換群 G の $\mathfrak{F}$ への作用 τ の組 $(G \underset{\tau}{\curvearrowright} \mathfrak{F})$ を非可換力学系と呼ぶが，通常測定可能な物理量に対応するのは，G-不変量としての固定部分環 $\mathfrak{F}^G =: \mathfrak{A}$ の元である。この状況で，

2.1 演繹 (top-down) vs. 帰納 (bottom-up)

という問題を考えると，理論が関わるのは一方向的演繹のみという標準的見方では，$G, \mathfrak{F}$ および $G \underset{\tau}{\curvearrowright} \mathfrak{F}$ の詳細について出発点で設定した「仮説」$\mathcal{TH}$

から実験にかかる全ての帰結を導出する。ではその理論の出発点で採用した仮説の「正しさ」は，どのように保証・検証されるのか？観測量 $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^G$ とその状態 $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$ に関して仮説から導かれた理論的予測が実験事実と「一致」するかどうか？ということ以外にそれを根拠づけるものはない。同時にこの「一致」なしには，いかに精緻で高級な理論であれただの *ad hoc* な仮定でしかない：

$$\begin{array}{c}\text{演繹に基づく理論的予測}\\ \updownarrow\longleftarrow \text{実験観測過程}\\ \text{実験データ } \mathcal{EX}\end{array}$$

しかし現実の実験は，有限個の物理量を有限精度で測定した結果しか与えないから，実験データと理論的予測とをどう「比較」しようとも，出発点の仮定 $\mathcal{TH}$ は実験結果を説明する**複数の可能性の一つ**,

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{TH} & \searrow & \\ \mathcal{TH}_1 & \longrightarrow & \mathcal{EX} + \text{誤差} \\ \vdots & \nearrow & \end{array},$$

に留まり,「一番もっともらしい理論の候補」という以上の「正当化」を求めるのは論理的に無理がある。

2.2 プロトタイプ：セクター理論再解釈による新たな理論的可能性

原理的に乗越え不可能なこの制約を**実効的に**逃れる術はないだろうか？それを考えるため,「セクター理論」に含まれる duality 構造に注目しよう。そこでは観測量 $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^G$ およびそれによって記述される或る「付加情報」から，出発点の量子場の代数 $\mathfrak{F}$，その内部対称性を記述する群 G およびその $\mathfrak{F}$ への作用を再構成することが可能である：

$$\mathfrak{A}(= \mathfrak{F}^G) + \textbf{something} \underset{\text{逆方向の再構成}}{\Longrightarrow} [\mathfrak{F} \underset{\tau}{\curvearrowleft} G].$$

Doplicher-Haag-Roberts 理論の場合「付加情報」**something** は空間的遠方で真空と区別できない状態を選び出す **DHR selection criterion** [1] で定まる物理的状態族の（圏論的）構造であり，Doplicher-Roberts の解析によりそれは代数 $\mathfrak{A}$ の内部自己準同型のなす或る C*-tensor category $\mathcal{T}(\subset End(\mathfrak{A}))$ と同一視される。これに対応して或るコンパクト Lie 群 G が存在し，$\mathcal{T}$ はその表現全体が作る圏 $Rep(G)$ と同型になる：DR category $\mathcal{T}(\subset End(\mathfrak{A})) \overset{[2]}{\simeq} Rep(G)$ [2]。群 G の同定には上記の淡中-Krein 双対性（の或る一般化）が有効に働き，その既約表現の同値類全体 $\hat{G}$ は，$\mathfrak{A}$ の相互に非同値な表現＝「セクター」をそれらが担う「G-charge」に基づいて parametrize する「秩序変数」として機能する。ひとたびこういう構造が明らかになれば，量子場の代数 $\mathfrak{F}$ は，（有限な d 個の）等距離写像が生成する Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ とその G-固定部分環 $\mathcal{O}_d^G$ により $\mathfrak{A}$ と $\hat{G}$ との接合積 $\mathfrak{A} \rtimes \hat{G} \simeq \mathfrak{A} \underset{\mathcal{O}_d^G}{\otimes} \mathcal{O}_d$ として数学的に構成され：

$\mathfrak{F} = \mathfrak{A} \underset{\mathcal{O}_d^G}{\otimes} \mathcal{O}_d \simeq \mathfrak{F}^G \rtimes \hat{G}$，逆に群 G は $\mathfrak{F}$ の中で $\mathfrak{A}$ を固定する Galois 群[1]として定まる: $G = Gal(\mathfrak{F}/\mathfrak{A})$ [2]。

この例でのミクロレベルの［量子場＋その内部対称性 $\mathfrak{F} \underset{\tau}{\curvearrowleft} G$］は，双対性を通じて［観測可能量の代数 $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^G$ ＋そのセクター構造］という「マクロデータ」と数学的に等価で，$\mathfrak{A}$ を「係数環」に持つ「方程式」としての DHR criterion を「解く」ことによって定まる **Galois 拡大の代数**と見ることができる。同一のマクロデータを与えるミクロモデルはもちろん他にも存在し得るが,「セクター構造」に関する限りそれらは全て等価で区別する理由はない。つまり,「森羅万象全てを記述するただ一つの窮極理論」というファウスト的願望を一旦断念し，特定のスケール領域毎に特定の現象群の限られた側面を限られた精度で記述する理論を考える，という現実的視点に立てば，その範囲内で**普遍性**を満たす記述法が**唯一つ**定まる。別の領域での別の現象群・側面に対してはまた一つ，$\cdots$，ということを繰り返し，それらを多様体の局所地図の貼り合わせと類似の仕方でネットワーク的につないで行けば，それによって「実効的」に上の「制約」の呪縛から脱け出す道が開ける可能性がある，ということになるだろう。

2.3 セクター概念に基づく理論的枠組

上で重要なのは,「セクター」概念導入により，ミクロ＝［セクター内部での量子論的非可換性］，マクロ＝［セクター間の関係を記述する古典的マクロ変数］，という形で，量子論的ミクロレベルと古典的マクロレベルとが明解に切り分けられたことである。ただし，無限自由度量子系の代数の任意の表現は一意的に既約分解できるとは限らないので，この視点の一般化には,「セクター」＝非同値表現，という上の解釈をもう少し精密化する必要がある。既約分解に基づく表現の分類を諦めたとき，どういう表現が分解の基本単位になり得るか？という問いにちょうど適合するのは**準同値性**，即ち，多重度（multiplicity）**を無視した表現の同値**関係 $\pi_1 \approx \pi_2$ [= unitary equivalence up to multiplicity] による分類である。これは，物理量の代数 $\mathfrak{A}$ の表現 π が生成する von Neumann 環 $\pi(\mathfrak{A})''$ の同型性，$\pi_1 \approx \pi_2 \Longleftrightarrow \pi_1(\mathfrak{A})'' \simeq \pi_2(\mathfrak{A})''$，と等価で [3]，この分類での最小単位は **factor 表現＝［centre が自明な表現］**である。代数 $\mathcal{C}$ の可換性が $\mathcal{C}$ 自身とその centre $\mathfrak{Z}(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ との一致で特徴づけられるのと対照的に，centre 自明 $\mathfrak{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}\mathbf{1}$ の条件で定義された factor $\mathcal{M}$ は，古典性＝可換性の対極にある量子的一体性を，既約性が意味を失うような状況にまで一般化した概念に他ならない。Factor でない表現はその非自明な centre が可換環として「同時対角化可能」ゆえ，常に factor の直和（あるいは直積分）にまで一意的に分解される。これは既約分解が一般に非可換な可換子環 $\pi(\mathfrak{A})'$ の対角化を要求し，そのため一意的分解が保証されないのとは大きな違いで，広い文脈ではむしろ既約表現 = type I とそこへの既約分解の方が例外的である。この事情を考慮すれば,「ユニタリー非同値」という常套句は，正確には準同値性の裏返しである disjointness（無縁性!?）:

---

[1]ただし可換体上の Galois 理論と異なって,［方程式の一つの解を別の解に移す］という Galois 群の周知の機能は，対称性の「破れ」なしには実現されない。

$\pi_1 \overset{|}{\circ} \pi_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\pi_1, \pi_2) := \{T : \mathfrak{H}_{\pi_1} \to \mathfrak{H}_{\pi_2}; T\pi_1(A) = \pi_2(A)T\} = 0$，として理解すべきであり，[ユニタリー同値か非同値か] より，[準同値か disjoint か] の視点の方が表現の中味の異同をより適切に表わしている：例えば同一の既約表現 π を反復した直和表現 $n\pi := \overbrace{\pi \oplus \cdots \oplus \pi}^{n}$ は，定義からその多重度 n に依らず全て準同値だが，ユニタリー同値性は多重度の違いだけでも簡単に崩れる：$n\pi \not\cong m\pi$ $(n \neq m)$，等。

Factor 表現とそれに付随する状態は熱力学・統計力学の文脈での「熱力学的純粋相」の概念にピッタリ一致するので，「**セクター**」を「**純粋相**」[2]の一般化として物理的に解釈すれば，《**ミクロ・マクロ対応**》が次のように数学的に定式化される [4]： **純粋相**＝単一セクター＝ [centre 自明な factor 表現] がミクロ量子系固有の非可換内部構造に対応し，複数セクターが確率的に共存する**混合相**では，各セクター内部およびセクター間の構造を各々記述する [factor ＝量子的ミクロ] と [非自明な centre ＝マクロ古典系] が共存して両者が《**量子・古典複合系**》を形成する。このときセクター一つ一つは，「同時対角化」された centre ＝マクロ的古典変数の「固有値」(＝数学的には centre の「スペクトル」) の違いによって過不足なく識別される。つまり，量子的純粋相＝セクターは，(その内部構造に立ち入らない限り) 秩序変数として機能する centre のマクロ的古典変数によって一意的に指定される，という意味で，《ミクロ・マクロ対応》が正確に成り立つ。複数セクターの確率的共存としての混合相では，セクター間にまたがる状態ベクトルの「重ね合わせ」＝線型結合は，相互の disjointness のためセクター間「干渉効果」が消え，重ね合わせ状態＝統計的混合である。通常この状況は，超選択則＝ [重ね合わせの原理の制限] により [重ね合わせ可能な superselection sectors に状態が分解される] という形で解釈されているので，混合相＝ [超選択則の存在] ＝ [非自明な centre の存在] ＝ [古典的巨視的な秩序変数が存在する《量子・古典複合系》]，という等式に導かれる。このように理解された《ミクロ・マクロ対応》から出発すれば，種々のレベル・形での「量子古典対応」を一般化した数学的形態としての《ミクロ・マクロ双対性》 [5] が成立し，それによってミクロとマクロが有機的に結ばれると同時に，古典的マクロレベルの演ずる普遍的役割が自然に定式化され，理解可能になる [4]。

これとは対照的に，量子力学での有限自由度正準交換関係の代数は Stone-von Neumann 一意性定理より単一セクターしか持たず，そこにミクロ量子系から centre としてマクロ古典系が emerge する余地はない。マクロ古典系が宇宙開闢以来常に存在し続けてきたものでなければ，宇宙史のどこかの時点でミクロ量子系から生成されたはずだが，無限自由度量子系の関与なしにはそれは不可能ゆえ，既にこの抽象レベルで古典世界＝無限量子の集積効果という「量子古典対応」の本質の一端が確認される。逆に無限自由度量子系ならば，それに伴う disjoint 表現からマクロ古典系が centre として（事後的に）生成されるので，マクロ時空を生成させる目的で予め理論に時空自由度のタネ（＝「非可換時空」）をマッチポンプ式に仕込んでおく必要はない。

---

[2] 「純粋相」と「セクター」という言葉は，物理的文脈と数学的文脈の違いだけで内容は全く同じものとして扱う。

こういう視点に立つと，次のように新たな理論展開の可能性が開ける：

A) 相対論的量子場の非平衡局所状態の新しい一般的定式化 [7, 6]

B) 破れない内部対称性に関する DHR-DR セクター理論 [1, 2] とその**再定式化** [4]

C) **自発的に破れた**対称性 (SSB) への B) への拡張 [4]

D) ミクロ・マクロ関係の統一的扱い [6, 4]

E) **明示的に破れた**対称性と秩序変数としての温度概念 [?]

F) 測定過程の一般的記述とミクロ系再構成の可能性 [5, 16]

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\left[\begin{array}{c}\text{A) 非平衡}\\ \text{局所状態:}\\ \text{連続セクター}\end{array}\right] & & \left[\begin{array}{c}\text{D) ミクロ-マクロ}\\ \text{の統一的枠組:}\\ \textit{Inter}\text{-sectorial}\end{array}\right] & \rightarrow & \left[\begin{array}{c}\text{F) 測定と双対性:}\\ \textit{Intra}\text{-sectorial}\end{array}\right] & \rightarrow \cdots \\
\downarrow & \searrow & \uparrow & & & \\
\left[\begin{array}{c}\text{B) セクター理論}\\ \text{の再定式化:}\\ \text{離散セクター}\end{array}\right] & \rightarrow & \left[\begin{array}{c}\text{C) 自発的破れの}\\ \text{セクター構造:}\\ \text{離散 \& 連続}\end{array}\right] & \rightarrow & \left[\begin{array}{c}\text{E) 対称性の}\\ \text{明示的破れ}\end{array}\right] & \rightarrow \cdots
\end{array}
$$

ここで，D) ミクロ-マクロの統一的枠組とは，

$$
\begin{array}{ccc}
\text{(ミクロ)} & & \text{(マクロ)} \\
\text{i)}\left[q:\ \begin{array}{c}\text{対象系の}\\ \text{一般的状態}\end{array}\right] & \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} & \text{ii)}\left[c:\ \begin{array}{c}\text{基準参照系とその}\\ \text{セクターの分類空間}\end{array}\right] \\
& \text{iii) : i) と ii) との比較} & \\
\Uparrow & & \Downarrow \\
\text{iv)}\left[\begin{array}{c}\textbf{selection criterion:}\\ c\text{-}q\ \textit{channel}\ \text{ii)} \Longrightarrow \text{i)}\end{array}\right] & \overset{\textit{adjunction}}{\rightleftarrows} & \left[\begin{array}{c}\text{ii) に基づく i) の記述・分類・解釈:}\\ q\text{-}c\ \textit{channel}\ \text{i)} \Longrightarrow \text{ii)}\end{array}\right]
\end{array}
$$

という形で，ミクロとマクロの関係を selection criteria に基づいて統一的に扱う一般的枠組 [6, 4] のことであり，多様体の扱いや非平衡局所状態の定式化 [7, 6] はその具体例と見ることができる：

Example 1 局所地図 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n)\}$ で記述される多様体 M:
i) = 局所近傍系 U_λ, *ii)*= ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$,
iii)= 局所地図 $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n$,
iv)= ホモロジー，コホモロジー，ホモトピー，K-群，特性類等の幾何学的不変量に基づく M の幾何学的構造の分類と解釈

Example 2 熱力学的パラメータのゆらぎを伴う一般的熱状態の局所化によって得られる相対論的量子場の非平衡局所状態 *[7, 6]:*
i) = 局所エネルギー条件 $\omega((\mathbf{1}+H_{\mathcal{O}})^m) < \infty$ を満たす状態 ω の全体 E_x,
ii) = 熱力学的パラメータ (β,μ) から成る熱力学的相の分類空間 B_K および (β,μ) のゆらぎを記述する B_K 上の確率測度 $\rho \in M_+(B_K) =: Th$ の全体,
iii) = *(i)* のエネルギー条件で正当化された*)* "1 点 x での量子場"の集まり $\mathcal{T}_x$ の測定値を比較することにより，未知の状態 ω を既知の基準参照状態 $\omega_\rho = \mathcal{C}^*(\rho) = \int_{B_K} d\rho(\beta,\mu)\omega_{\beta,\mu}$ と同一視： $\omega \underset{\mathcal{T}_x}{\equiv} \mathcal{C}^*(\rho)$ すること,
iv) = *(*局所化された熱力学第 *0* 法則としての*) adjunction* =「マッチング条件」：

$$[E_x/\mathcal{T}_x]\,(\omega,\mathcal{C}^*(\rho)) \overset{q\rightleftarrows c}{\simeq} [Th/\mathcal{C}(\mathcal{T}_x)]\,((\mathcal{C}^*)^{-1}(\omega),\rho).$$

ただし，$\mathcal{C}^*$ は古典的参照系を一般的量子状態へ埋め込む *c→q channel* で，その（部分的な）逆写像である "$(\mathcal{C}^*)^{-1}$" は *q→c channel* として，*a)* 局所的熱状態 ω を基準的状態 $\mathcal{C}^*(\rho)$ と同一視，$\omega \underset{\mathcal{T}_x}{\equiv} \mathcal{C}^*(\rho)$，することを通じて，*b)* ω に既知の語彙 $\rho \in Th$ に基づく熱的解釈 $\rho \underset{\mathcal{C}^*(\mathcal{T}_x)}{\equiv} (\mathcal{C}^*)^{-1}(\omega)$ を与える，という二重の役割 $[\omega \underset{\mathcal{T}_x}{\equiv} \mathcal{C}^*(\rho)] \rightleftarrows [(\mathcal{C}^*)^{-1}(\omega) \underset{\mathcal{C}^*(\mathcal{T}_x)}{\equiv} \rho]$ を果たす。

3 セクター間 vs. セクター内の構造

上のような形で，セクター相互の関係は centre ＝秩序変数を用いて clear-cut に理解できることが分かった。しかし，同じセクター内に属する状態は全て同一の秩序変数の値を持つから，秩序変数を用いてセクター内部の構造を検索することはできない。どうするか?物理量を測定しその値から量子状態を知ろうとするとき必要なのは,「同時測定可能な物理量の極大集合」という概念で，数学的には（1つのセクターを記述する物理量の factor 表現 $\mathcal{M}$ の）極大可換部分環 (**MASA**) にほかならない。ただし通常の議論で用いられる条件 $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ を $\mathcal{M}$ の中で考えると，$\mathcal{M}' \subset \mathcal{A}' = \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ より $\mathcal{M}' = \mathcal{M}' \cap \mathcal{M} = \mathfrak{Z}(\mathcal{M})$ で $\mathcal{M}$ は自動的に type I になってしまうから，一般的文脈では $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cap \mathcal{M}$ という形で扱う必要がある。

3.1 セクター内部における量子古典対応

このような MASA $\mathcal{A}$ の物理量を測定し結果を測定器の目盛りで読み取るとすれば，$\mathcal{A}$ の測定に関する限り対象系 $\mathcal{M}$ の部分環としての $\mathcal{A}$ と測定器を指定する代数とは同型と見なせて，両者を区別する必要はない。したがって，$\mathcal{M}$ と測定器系とを couple させた測定状況はひとまず合成系 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$ で記述され，その**合成系のセクター構造**を記述する centre ＝秩序変数がとりもなおさず測定量 $\mathcal{A}$ だということになる： $\mathfrak{Z}(\mathcal{M}\otimes\mathcal{A}) = \mathfrak{Z}(\mathcal{M})\otimes\mathcal{A} = \mathbf{1}\otimes L^\infty(Spec(\mathcal{A}))$.
つまり $\mathcal{M}$ のセクター内構造は，それを外部測定系 $\mathcal{A}$ と couple させた合成系 $\mathcal{M}\otimes\mathcal{A}$ の**条件的セクター構造**として記述される：**内部状態と外部変数との双対性**！このような関係は物理量の代数と状態の構造に限らず，測定に必要

な $\mathcal{M}$ と $\mathcal{A}$ の coupling, 即ち，合成系の dynamics にも及び，その coupling によるテンソル積 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$ の「捻り」なしには本来「測定」自体が実現不可能である。

物理的状況での状態記述に現われる Hilbert 空間は可分との標準的仮定に従えば，可換 von Neumann 環としての $\mathcal{A}$ は 1 個の自己共役作用素 $A_0 = A_0^* \in \mathcal{A}$ で生成される： $\mathcal{A} = \{A_0\}''$ [8]。すると，一般には無限次元群である $\mathcal{A}$ のユニタリー群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ の中に可換環 $\mathcal{A}$ そのものを生成するような或る有限次元可換 Lie 群 $\mathcal{U}$ （その不変測度を du とする）が取れると仮定してよいことになる： $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}(\mathcal{A}), \mathcal{A} = \mathcal{U}''$。この $\mathcal{U}$ を用いると MASA の条件式 $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cap \mathcal{M}$ は，

$$\mathcal{A} = \mathcal{M} \cap \mathcal{A}' = \mathcal{M} \cap \mathcal{U}' = \mathcal{M}^{\alpha(\mathcal{U})},$$

という形に書き替えられ，MASA $\mathcal{A}$ は $\mathcal{U}$ の随伴作用 $\alpha_u := Ad(u) : \mathcal{M} \ni X \longmapsto uXu^*$ の下で $\mathcal{M}$ の固定部分環になる [5]。すると再びこの文脈で上に論じた群双対性と Galois 拡大の概念が働き始める。Kac-竹崎作用素 (略して K-T 作用素) [9, 10] を用いてその普遍的意味を探ってみたい。

3.2 測定相互作用と instrument

局所コンパクト群 G に関する群双対性の文脈での K-T 作用素は，可換 von Neumann 環 $M = L^\infty(G, dg)$ （dg : 左不変測度）上の余積 $\Gamma : M \to M \otimes M$, $\Gamma(f)(s,t) := f(st)$ （$f \in M,\ s,t \in G$） を $\Gamma(X) = V^*(1 \otimes X)V$ $(X \in M)$ の形で実現する $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ 上のユニタリー $(V\xi)(s,t) := \xi(s, s^{-1}t)$ （$\xi \in \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$, $s,t \in G$） と考えるのが分かり易い，ただし $\mathfrak{H} = L^2(G, dg)$ [9, 10, 11]。より一般的な文脈では，Γ の余結合性と等価な $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ 上の 5 項関係式 $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$ で特徴づけられ，convolution 積 $\omega_1 * \omega_2 := \omega_1 \otimes \omega_2 \circ \Gamma$ を持つ predual $M_* = L^1(G)$ の Fourier 変換 $\lambda : M_* \ni \omega \longmapsto \lambda(\omega) := (i \otimes \omega)(V) \in \hat{M} := \lambda(G)''$ によって G の正則表現 $(\lambda, \mathfrak{H})$, $\lambda(\omega_1 * \omega_2) = \lambda(\omega_1)\lambda(\omega_2)$ を生成すると共に，そのテンソル冪 $\lambda^{\otimes n} = \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$ 間の準同値関係 $\lambda^{\otimes m} \approx \lambda^{\otimes n}$ $(\forall m, n \in \mathbb{N})$ の intertwiner $V(\lambda \otimes \iota) = (\lambda \otimes \lambda)V$ として機能する。この式を λ に対する方程式として解くことが，局所コンパクト群 G とその表現に関する辰馬双対定理 [12] の証明の核心で，群（あるいは Kac 環の）双対性は $V \longleftrightarrow \widehat{V} := \sigma V^* \sigma$ （$\sigma(\xi \otimes \eta) := \eta \otimes \xi$, $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$） の下での M と $\hat{M}$ の入れ替えに帰着する [11]。

MASA $\mathcal{A} = L^\infty(Spec(\mathcal{A}))$ を扱う今の文脈では $M = L^\infty(\widehat{\mathcal{U}}) = \lambda(\mathcal{U})''$, ただし $\widehat{\mathcal{U}}$ は可換群 $\mathcal{U}(\subset \mathcal{A})$ の指標 $\chi : \mathcal{U} \ni u \longmapsto \chi(u) \in \mathbb{T}$ の作る双対群で, V の定義を Dirac のブラ・ケット記法で書けば：

$$V|\gamma, \chi\rangle = |\gamma, \gamma\chi\rangle \quad (\gamma, \chi \in \widehat{\mathcal{U}}). \tag{1}$$

代数的準同型 $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ としての $\mathcal{A}$ の指標 $\chi \in Spec(\mathcal{A})$ を可換ユニタリー群 $\mathcal{U}$ へ制限すると群指標 $\chi\restriction_{\mathcal{U}} \in \widehat{\mathcal{U}}$ になるから，$Spec(\mathcal{A})$ は $\widehat{\mathcal{U}}$ の中に埋め込まれ: $Spec(\mathcal{A}) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{U}}$，後者の単位指標 $\iota \in \widehat{\mathcal{U}}$, $\iota(u) \equiv 1$ $(\forall u \in \mathcal{U})$ が測定器示針の「**中立位置**」として機能する（$\mathcal{U}$: 非コンパクトの時 $L^2(\mathcal{U})$ の中に $\iota \in \widehat{\mathcal{U}}$ に対応するベクトルは存在しないが，$\mathcal{U}$ の不変平均 $m_{\mathcal{U}}$ で代用可）。

$\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{M}$ に伴う可換群 $\mathcal{U}$ の埋め込み写像 $E : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{M}$ から $\mathcal{U}$ のスペクトル分解，$E(u) = \int_{\chi \in Spec(\mathcal{A}) \subset \widehat{\mathcal{U}}} \overline{\chi(u)} dE(\chi)$ $(u \in \mathcal{U})$，が導かれ，dE は $\mathcal{M}$ の射影子に値を取る $\widehat{\mathcal{U}}$ 上のスペクトル測度。これを用いて $\mathfrak{H}_{\mathcal{M}} \otimes L^2(\widehat{\mathcal{U}})$ ($\mathfrak{H}_{\mathcal{M}}$: $\mathcal{M}$ の標準表現の Hilbert 空間 $\cong L^2(\mathcal{M})$) 上での V の表現を $E_*(V) = \int_{\chi \in Spec(\mathcal{A})} dE(\chi) \otimes \lambda_\chi$ とすれば，(1) 式に対応した $E_*(V)$ の作用は

$$E_*(V)(\xi \otimes |\gamma\rangle) = \int_{\chi \in Spec(\mathcal{A})} dE(\chi)\xi \otimes |\chi\gamma\rangle, \quad \text{for } \gamma \in \widehat{\mathcal{U}}, \quad \xi \in L^2(\mathcal{M}), \tag{2}$$

となり，５項関係式 $E_*(V)_{12}E_*(V)_{13}V_{23} = V_{23}E_*(V)_{12}$ が成り立つ。上式を（離散スペクトルの場合に）$\mathcal{M}$ の一般的状態 $\xi = \sum_{\gamma \in \widehat{G}} c_\gamma \xi_\gamma \in \mathfrak{H}_{\mathcal{M}}$ と測定器の**中立位置**$|\iota\rangle$ に適用すると，coupling $E_*(V)$ の作用により無相関の初期状態 $\xi \otimes |\iota\rangle$ が完全相関 [13] を持つ状態 $E_*(V)(\xi \otimes |\iota\rangle) = \sum_{\gamma \in \widehat{G}} c_\gamma \xi_\gamma \otimes |\gamma\rangle$ に変換され，対象系 $\mathcal{M}$ の状態 ξ_γ と測定器の示針が与える測定データ γ との間に１対１相関が作り出されることがわかる [5]。

こうして，無限自由度量子系を含めた一般的文脈で小澤の観測スキーム [14] を実現する対象系と測定系の間の coupling は，MASA $\mathcal{A}$ を生成する群の双対 $\widehat{\mathcal{U}}$ とその双対構造を記述する K-T 作用素 V から $E_*(V)$ という形で一般的かつ具体的に決まることが明らかになった [5]。以上を用いて，測定に関わる全ての要素を統合する重要概念として **instrument** $\mathfrak{I}$ を

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(\Delta|\omega_\xi)(B) &:= (\omega_\xi \otimes |\ \iota\rangle\langle\ \iota|)(E_*(V)^*(B \otimes \chi_\Delta)E_*(V)) \\ &= (\langle\ \xi| \otimes \langle\ \iota|)E_*(V)^*(B \otimes \chi_\Delta)E_*(V)(|\xi\rangle \otimes |\ \iota\rangle),\end{aligned}$$

で定義すれば，それによって測定過程に対する確率解釈を可能にする全要件 [14] が，type I の制約を離れ無限自由度の量子場まで取り込める形で整う [5]: $\mathcal{M}$ の初期状態 $\omega_\xi : \mathcal{M} \ni B \longmapsto \omega_\xi(B) = \langle\xi|B\xi\rangle$ から出発して，$\mathcal{A}$ の測定値 $\gamma \in \widehat{\mathcal{U}(\mathcal{A})}$ が Borel 集合 Δ に入る確率は $p(\Delta|\omega_\xi) = \mathfrak{I}(\Delta|\omega_\xi)(\mathbf{1})$，それに伴って実現される $\mathcal{M}$ の事後状態は $\mathfrak{I}(\Delta|\omega_\xi)/p(\Delta|\omega_\xi)$ で与えられる。

4 対象系と測定装置の合成系＝接合積 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U}$ および竹崎双対性

測定過程の dynamics を与える coupling $E_*(V)$ の物理的意味を知るため，K-T 作用素 V，$(V\eta)(\gamma_1, \gamma_2) = \eta(\gamma_1, \gamma_1^{-1}\gamma_2)$ $(\eta \in L^2(\widehat{\mathcal{U}} \times \widehat{\mathcal{U}}))$，を Fourier 変換する：$W := (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F})^{-1}V(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F})$，$(W\xi)(u_1, u_2) := \xi(u_2u_1, u_2)$ (for $\xi \in L^2(\mathcal{U} \times \mathcal{U}), u_1, u_2 \in \mathcal{U}$)，ただし $(\mathcal{F}\xi)(\gamma) := \int \overline{\gamma(g)}\xi(g)dg$ $(\xi \in L^2(\mathcal{U}))$。この W は５項関係式 $W_{12}W_{13}W_{23} = W_{23}W_{12}$ および intertwining relation $W(\lambda \otimes \lambda) = (\iota \otimes \lambda)W$ を満たす $\mathcal{U}$ 上の K-T 作用素で，埋め込み写像 $E : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{M}$ を介して $\mathcal{M}$ 上での表現 $EW := (E \otimes id)(W)$ を作れば，類似の５項関係式 $(EW)_{12}(EW)_{13}W_{23} = W_{23}(EW)_{12}$ と intertwining relation $EW(u \otimes \lambda_u) = (I \otimes \lambda_u)EW$ が成立つ。$\mathcal{U}$ の $\mathcal{M}$ への随伴作用 $\alpha = Ad$ を

通じて $\mathcal{M}$ を $L^\infty(\mathcal{U},\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes L^\infty(\mathcal{U})$ に埋め込む準同型写像 $\pi_\alpha : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M} \otimes L^\infty(\mathcal{U})$ を

$$(\pi_\alpha(X)\xi)(u) := \alpha_u^{-1}(X)(\xi(u)) = (u^{-1}Xu)(\xi(u)) \qquad (3)$$
$$\text{for } \xi \in L^2(\mathcal{M}) \otimes L^2(\mathcal{U}), u \in \mathcal{U},$$

で定義すると，EW はその unitary implementer

$$\pi_\alpha(X) = (EW)(X \otimes I)(EW)^* \quad \text{for } X \in \mathcal{M}$$

になる。その像 $\pi_\alpha(\mathcal{M})$ と $\mathcal{U}$ の群環 $\mathbb{C}I \otimes \lambda(\mathcal{U})''$ とで生成された von Neumann 環が $\mathcal{U}$ の作用 α による $\mathcal{M}$ の接合積 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U}$ である [10]:

$$\mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U} := \pi_\alpha(\mathcal{M}) \vee (\mathbb{C} \otimes \lambda(\mathcal{U})'').$$

$\mathcal{M} = \mathbb{C}1$ に対応した群の正則表現 $(\lambda, L^2(\mathcal{U}))$ と同様，接合積 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U}$ は convolution 積 $(X * Y)(u) = \int_{\mathcal{U}} X(v)\alpha_v(Y(v^{-1}u))dv$ および対合 $X^\#(u) = \alpha_u(X(u^{-1}))^*$ を持つ *-環 $L^1(\mathcal{U},\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes L^1(\mathcal{U})$ の operator-valued Fourier 変換 $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F}(X) = (Xdu \otimes id)(\sigma(EW)^*\sigma) = \int_{\mathcal{U}} X(u)udu$$
$$\text{for } X \in L^1(\mathcal{U},\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes L^1(\mathcal{U});$$
$$\mathfrak{F}(X * Y) = \mathfrak{F}(X)\mathfrak{F}(Y) \text{ and } \mathfrak{F}(X^\#) = \mathfrak{F}(X)^*,$$

の像（の弱位相での完備化）と見てもよい。α は $\mathcal{M}$ と測定系 $\mathcal{A}$ との coupled dynamics を与えるから，その switch-on, off $\iota \to \alpha \to \iota$ （の時間経過）に応じて合成系＝接合積 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U}$ の構造は，initial: $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{A} \supset)\mathcal{M} \otimes L^\infty(\widehat{\mathcal{U}}) = \mathcal{M} \rtimes_\iota \mathcal{U} \to \mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U} \to \mathcal{M} \otimes L^\infty(\widehat{\mathcal{U}})$: final と変化することになる。

上の Fourier 変換と接合積との並行性が示唆するように，接合積を作る操作を二度反復すれば元に戻る，ということは竹崎双対定理 [15] でよく知られている：

$$(\mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U}) \rtimes_{\hat{\alpha}} \widehat{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{M} \otimes B(L^2(\mathcal{U})) \simeq \mathcal{M}.$$

同型 $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M} \otimes B(L^2(\mathcal{U}))$ は固有無限の $\mathcal{M}$ に対して成り立ち，無限自由度量子系なら OK。$\hat{\alpha}$ は上の π_α を $\pi_{\hat{\alpha}}(Y) := Ad(1 \otimes \sigma W^*\sigma)(Y \otimes 1)$ (for $Y \in \mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U}$) と置き換えて定まる $\mathcal{U}$ の $\mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U}$ への dual co-action [10] で，$\mathcal{U}$ のように可換群なら $\widehat{\mathcal{U}}$ の作用に帰着する。このように接合積 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U}$ は $\mathcal{M}$ の非可換な Fourier dual に相当し，その構造が分かれば $\widehat{\mathcal{U}}$ の co-action $\hat{\alpha}$ による第二接合積を用いてミクロ量子系の**代数 $\mathcal{M}$ が再現できる。元々我々の議論はセクター内の構造を解明するため，ミクロ系の代数** $\mathcal{M}$ の知識を前提しその MASA $\mathcal{A}$ の測定データ $Spec(\mathcal{A}) \subset \widehat{\mathcal{U}}$ から**状態を決め**るための測定過程を考え，そこで接合積 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U}$ の演ずる本質的役割に出会ったのだが，それをさらに押し進めれば接合積の双対性によって議論は「反転」し，最初の**代数**$\mathcal{M}$ をも測定データから再構成し直す「逆問題」へと導かれる [16]。これは最初に述べた Fourier-Galois 双対性の作用素環的拡張としての「ミクロ・マクロ双対性」 [5] に基づく「双方向性」の重要な一側面である。

5 「測定値」を確定させる増幅過程 = "decoherence"

上のような対象系と測定系との coupling によって差し当たり実現されるのは，両者の微視的接触点における「量子論的な状態変化」である。「測定」という所期の目的の実現には，その微小変化を測定器の示針移動という巨視的古典的な状態変化にまで「増幅」する過程の媒介が不可欠である。それがどのように記述されるかは，測定過程に限らず，ミクロ量子系とマクロ世界との物理的関係に関わる一般的文脈でもきわめて重要な問題の一つといえよう。寡聞にして私はその一般的解答を知らないので，ここでその問題を考えてみたい。

この目的に適切な数学的基礎を与えるのは，上に見た正則表現の任意テンソル冪 $\lambda^{\otimes n} = \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$ の間の準同値関係 $\lambda^{\otimes m} \approx \lambda^{\otimes n}$ $(\forall m, n \in \mathbb{N})$ である。結果はきわめて単純で，K-T 作用素 V の無限回の反復作用を考えるだけでよい：それによって引き起こされる状態変化は:

$$
\begin{aligned}
&V_{n,n+1} \cdots V_{23} E_*(V)_{12}(\xi \otimes \underbrace{|\iota\rangle \otimes |\iota\rangle \cdots \otimes |\iota\rangle}_{n}) \\
&= \sum_{\gamma \in \widehat{G}} c_\gamma V_{n,n+1} \cdots V_{34} V_{23} (\xi_\gamma \otimes |\gamma\rangle \otimes |\iota\rangle \cdots \otimes |\iota\rangle) \\
&= \sum_{\gamma \in \widehat{G}} c_\gamma V_{n,n+1} \cdots V_{34} (\xi_\gamma \otimes |\gamma\rangle \otimes |\gamma\rangle \cdots \otimes |\iota\rangle) = \cdots \\
&= \sum_{\gamma \in \widehat{G}} c_\gamma \xi_\gamma \otimes \underbrace{|\gamma\rangle \otimes |\gamma\rangle \cdots \otimes |\gamma\rangle}_{n} \ \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{\gamma \in \widehat{G}} c_\gamma \xi_\gamma \otimes \left[|\gamma\rangle^{\otimes\infty}\right],
\end{aligned}
$$

あるいは Heisenberg 描像で:

$$
\begin{aligned}
&A \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_{n+1} \\
&\longmapsto E_*(V)^*_{12} V^*_{23} \cdots V^*_{n,n+1} (A \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_{n+1}) V_{n,n+1} \cdots V_{23} E_*(V)_{12} \\
&= Ad(E_*(V)^*_{12}) \circ Ad(V^*_{23}) \cdots Ad(V^*_{n,n+1})(A \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_{n+1}) \\
&= Ad(E_*(V)^*)(A \otimes Ad(V^*)(f_2 \otimes Ad(V^*)(\cdots \otimes Ad(V^*)(f_n \otimes f_{n+1}))) \cdots),
\end{aligned}
$$

というふうに，量子場の time-ordered Dyson matrix や Accardi による quantum Markov chain の定式化 [17] と類似の形で量子確率過程としての記述ができる。最初に述べた「量子古典対応」の基本的見方に従えば，Ising あるいは Heisenberg 強磁性体の巨視的磁化が無限個の spin の方向が揃った状態 $|+\rangle^{\otimes\infty}$ を用いて記述されるのと同様，状態 $|\gamma\rangle^{\otimes\infty}$ は無限個の量子の凝縮状態として巨視的古典的対象の状態を表すから，これを測定器の目盛の巨視的古典的な動き $\iota \to \gamma$，いわゆる "decoherence" 過程の数学的・抽象的レベルの記述として解釈するのは自然である。つまり，正則表現の任意テンソル冪 $\lambda^{\otimes n} = \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$ の間の準同値関係は，測定過程の記述において重要な repeatablity hypothesis を数学的に保証すると同時に，「測定値」確定のためのマクロ化過程をも自動的に与えるものと結論できる（少なくとも数学的抽象レベルで）。もう一点面白いことは，関係式 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ から写像 f のアフィン性 $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ $(\forall \lambda, \mu > 0)$ が導かれる

のと類似の議論によって，この準同値関係 $\lambda \approx \lambda^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ から $\lambda \approx \lambda^{n/m}$ $(\forall m, n \in \mathbb{N})$ が導出され，上の変換とそれに付随する確率過程の"無限分解可能性" $(AdV^*)^{t+s} \approx (AdV^*)^t(AdV^*)^s$ $(t, s > 0)$（つまり，Lévy 過程性）が導かれる。とすれば，1回1回の単純測定とそこでの「測定値」確定の問題は，測定の離散的反復ともまた連続測定とも，ほぼ「地続き」につながっていると見てよいだろう [18]。こうした見方が的外れでないとすれば，あとは対象系と測定系との微視的接触点と測定器の巨視的目盛りとの間をつなぐ媒体にどういう仕組みを「実装」すれば，上の抽象的数学的な増幅過程を物理的現実的に実現できるか？という工学の問題に帰着する。なお6月末の講演時点では，"semi-duality" という付加的な仮定から従う関係 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U} \simeq \mathcal{A} \otimes B(L^2(\mathcal{U}))$ が増幅過程定式化のために不可欠だと誤解していたが，上で見たのはそのような仮定がなくとも極めて一般的な状況で増幅過程の"canonical な" 記述が可能だということであり，この場をお借りしてその誤りを訂正させて頂きたい。

最後になりましたが，この興味深い研究会を企画され，そこにご招待下さった東工大教授・渡辺澄夫さんに心よりお礼を申し上げます。

References

[1] Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J.E., Fields, observables and gauge transformations I & II, Comm. Math. Phys. **13** (1969), 1-23; **15** (1969), 173-200; Local observables and particle statistics I & II, **23** (1971), 199-230; **35** (1974), 49-85.

[2] Doplicher, S. and Roberts, J.E., Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, Comm. Math. Phys. **131** (1990), 51-107; Endomorphism of C*-algebras, cross products and duality for compact groups, Ann. Math. **130** (1989), 75-119; A new duality theory for compact groups, Inventiones Math. **98** (1989), 157-218.

[3] Dixmier, J., *C*-Algebras*, North-Holland, 1977; Pedersen, G., *C*-Algebras and Their Automorphism Groups*, Academic Press, 1979.

[4] Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria –Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions–, Open Systems and Information Dynamics, **10** (2003), 235-279; Temparature as order parameter of broken scale invariance, Publ. RIMS **40**, 731-756 (2004).

[5] Ojima, I., Micro-macro duality in quantum physics, pp.143–161 in Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum, World Scientific, 2005.

[6] Ojima, I., How to formulate non-equilibrium local states in QFT?- General characterization and extension to curved spacetime–, pp.365-384 in "*A Garden of Quanta*", World Scientific (2003); e-print: cond-mat/0302283.

[7] Buchholz, D., Ojima, I. and Roos, H., Thermodynamic properties of non-equilibrium states in quantum field theory, Ann. Phys. (N.Y.) **297** (2002), 219 - 242.

[8] Takesaki, M., *Theory of Operator Algebras I*, Springer-Verlag, 1979.

[9] Takesaki, M., A characterization of group algebras as a converse of Tannaka-Stinespring-Tatsuuma duality theorem, Amer. J. Math. **91** (1969), 529-564.

[10] Nakagami, Y. and Takesaki, M., Lec. Notes in Math. **731**, Springer, 1979.

[11] Enock, M. and Schwartz, J.-M., *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Springer, 1992.

[12] N. Tatsuuma, A duality theory for locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ. **6** (1967), 187-217; 辰馬伸彦,『位相群の双対定理』(紀伊國屋書店, 1994) .

[13] Ozawa, M., Perfect correlations between noncommuting observables, Phys. Lett. A, **335**, 11-19 (2005).

[14] Ozawa, M., Quantum measuring processes of continuous observables. J. Math. Phys. **25**, 79-87 (1984); Publ. RIMS, Kyoto Univ. **21**, 279-295 (1985); Ann. Phys. (N.Y.) **259**, 121-137 (1997).

[15] Takesaki, M.: Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math. **131**, 249-310 (1973); *Theory of Operator Algebras II*, Springer-Verlag, 2003.

[16] Ojima, I. and Takeori, M, How to observe quantum fields and recover them from observational data? – Takesaki duality as a Micro-Macro duality –, math-ph/0604054 (2006).

[17] Accardi, L., Noncommutative Markov chains, in Intern. School of Math. Phys., Camerino, pp. 268-295 (1974); Topics in quantum probability, Phys. Rep., **77** (1981) 169-192.

[18] 小嶋 泉・田中正, 状態の準備・波束の収縮と反復測定 (第 III 部第 2 章 pp.235 – 243,『量子情報と進化の力学』, 牧野書店, 1996)